# 長小數

**題目動機：**

出題時主要是想考長整數除法及循環小數，在b進位中，令

所以

題目參數中 a為|v|，c為vv的十進位表達。

動機是造一個煙霧彈，實則解c的基底字串。

題目動機完成後，反向操作證明，發現很難!!

不過考生不須證明，只需要一眼看出出題動機就可猜測解法。

證明及解法如下：

**題目解答：**

其中u、v 可為一串b進位的字母。

以 a=1、b=2、c=1來說， 因為 在二進位循環節中有很多種表達式，(u,v)=(空,01) 或是 (u,v)=(0,10)或是(0,1010)，但是不管如何取，最短循環節的長度都是固定的。

假設 ，v為最短循環節之一，令 |u| 為 u 的長度，|v| 為 v 的長度。

所以

所以

但是 與 互質 所以 b 整除，所以 整除。

Case I： ，則 表示 在 b 進位表達下 最後有 |u| 個 0， 也就是 的最後 |u| 個字母與 相同，也就是 後方內含，也就是說循環節可以從開始連接的前半部。所以可取 u 為空。

Case II： ，則 因為 ，也可得，表示 在 b 進位表達下 最後有 |v| 個 0， 也就是 的最後 |v| 個字母與 相同，也就是 內含於 ，也就是說循環節可以往前 |v|個字母。重複應用Case II，可將案例化約到Case I之中。

所以結論是可取 u 為空。所以我們令u 為空。

則

將c用 b 進位表達之，以記之。

，所以的長度小於2a，我們將之前方補零，延伸長度為2a

則

Case I：當 則左右兩式如下：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 長度 | |v| |  | |v| |
|  |  |  | | 0 |
|  |  |  | 0 | |
| = | | | | |
|  |  | 0 |  | |
|  |  | 0 | 0 |  |

觀察最底層長度 |v| 的字元，左式為 |v| 個零，這表示 內嵌於 後段。

觀察最高層長度 |v| 的字元，右式為 |v| 個零，這表示 內嵌於 前段。

觀察中間層長度 中的最後個的字元，左式的後段為，右式為倒數第二個長度|v|的節，所以依遞迴論，中斷充滿著。

所以由一個或複數個所組成。

Case II：當 ，同理反之，所以由一個或複數個所組成，此時我們可以不討論此案例，因為此時並非最短循環節，我們可以透過重取，避掉此一狀況。

結論：由一個或複數個所組成，稱為的基底字串。

所以此題解法如下

1. 將c用b進位表達為，並延伸長度為。尋找最短基底字串。
2. 如果c為0，回傳0，這表示無循環節。
3. 假設基底字串長度為k=1~2a，檢查是否由長度k的基底字串所組成。
4. 如果k為1，檢查開頭是否為b-1，如果是的話，則回傳0。這是 的效應。
5. 輸出最小的k。

**題目陷阱：**

1. 本題有煙霧彈，根本上不應該撰寫大數類別。**(陷阱)**
2. 如果為0，則無循環節，應回傳0。**(陷阱)**
3. 如果長度為2a，且每一字母皆為b-1，則應回傳0。**(陷阱)**
4. 字串，不應該使用2\*a個記憶體，應為a最大可到1000000000000000000，記憶體根本不夠用。**(陷阱)**
5. 字串為延伸前最長為64。如果大於，則答案為。這樣可以避免使用大量記憶體。
6. 程式優化，可在 0.1 Gigacycles中算出，在3G的機器上可以在0.03秒算出。故題目取1秒，已有33倍的效能空間。**(陷阱)**